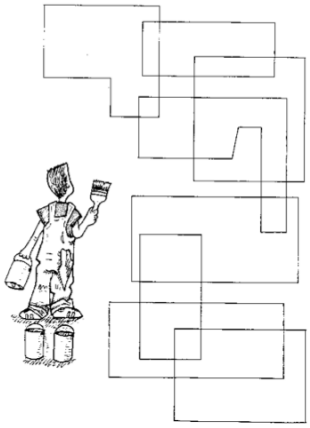
応用と発展

ここに示したような２色で塗り分けられる地図を作る簡単な方法があります。この地図は、閉じた曲線 (始点と終点を結ばれた線) の上に描かれています。このような曲線は任意の形でいくつでも重ねて描いてよく、それを使えば、いつも２色で塗り分けられる地図を描くことができます。子どもたちでも、この種類の地図は作ってみることができます。



一枚の紙か（地球儀のような）球体の上に描かれた地図を塗り分けるためには、４色あれば十分です。トーラス（ドーナツの形）のような変わった表面に描かれた地図を塗り分けるために何色が必要かを（専門としている科学者のように）不思議に思う人がいるかもしれません。この場合は７色が必要で、また、いつも７色あれば十分なのです。子どもたちは、これも試してみたがるかもしれません。

地図彩色問題には現在もよくわかっていない問題へ導く他の面白いバリエーションが多くあります。例えば、自分一人で１枚の地図を塗り分ける場合、賢く作業すれば４色で十分であることはわかっています。しかし、一人で作業する代わりに、よくわかってない人（または、まったく意見の合わない人）と一緒に作業する場合を考えてみましょう。自分は賢く作業し、相手は地図の色塗りを交互にするという規則のみに従って作業すると仮定します。まったく賢明でない（それどころか破壊的に）作業をする相手を補うために知恵を絞って作業した場合、いったい何本のクレヨンがテーブルに必要でしょうか？ 現在のところ、いつも３３本のクレヨンがあれば十分だろうということはわかっています。しかし、いつもこの数が必要かはわかっていません。(専門家は１０色より少ない数で十分であると予想しています。) 子どもたちは、どちらかというと２人で行うゲームのような、こういった状況の活動を楽しむかもしれません。

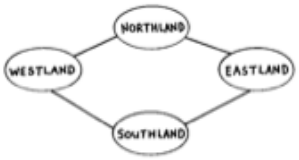
帝国の彩色問題として知られているバリエーションでは、同じ数の国が描かれている２枚の異なる地図を使って始めます。片方の地図（地球と呼びましょう）の中のそれぞれの国は、もう一方の地図の国（月の上の植民地と考えてください）と一対一のペアになっています。(両方の地図で) 境界を共有する国同士は違う色で塗るというこれまでと同じ約束に加えて、それぞれの地球の国とおのおのの月での植民地は同じ色で塗らなくてはならなりません。この問題をではいったい何色が必要になるでしょうか？ 答えは今のところわかっていません。

実際のコンピュータでは

この学習で見てきた地図の彩色問題は、本質的には個々の地図の彩色に必要な最小の色数（２、３または４色）を見つけるということです。どんな地図でもたった４色で塗り分けられるという予測が 1852 年になされましたが、それは 1976 年まで証明されませんでした。コンピュータ科学の世界は未解決の問題がいっぱいです。

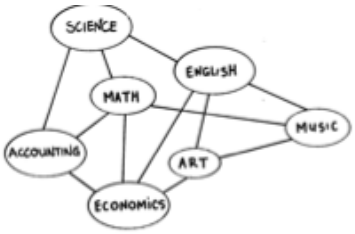
そして、４色定理が研究者から注目されてから 120 年以上経ったあとに証明されたと知ることは、ここ数十年間解決されていない問題に取り組んでいる人たちの励みとなります。

地図彩色は一般的には「グラフ彩色」として知られている問題のクラスに属します。コンピュータ科学でグラフは図に示すような関係の抽象的な表現となります。



学習９のマッディ市で述べたように、「グラフ」という用語は数学で用いる棒グラフのような数値データを示す図を指すのではなく、コンピュータ科学者が使用する「グラフ」はこれらと関係がありません。コンピュータ科学でのグラフは対象（オブジェクト）を専門的にはノードと呼ばれる大きな円か大きな点で描き、そしてオブジェクト間のある種の関係を示すためにノード間を線で結びます。このグラフはこの学習の最初で示した地図を表現することになります。ノードは国を表し、２つのノード間の線はそれらの国が国境を共有していることを示しています。グラフでは、彩色のルールは同じ色が割り当てられたノードは線で結ばれてはいけないということになります。地図とは違って、一般的のグラフの彩色に必要な色数に上限はありません。それは、地図がその２次元の性質により可能な配置が制限されているのに対して、グラフでは多くの異なったノード間の結合が線として描かれるからです。「グラフ彩色問題」は特定のグラフに対して必要とされる最小の色数を見つける問題です。

このグラフにおいてノードは学校の科目になっています。２教科間の線は、少なくとも１人の生徒が両方の科目を取っていることを意味します。そのため、この２つの科目は同じ時間割のコマに置くことができません。この表現を使い、異なった色が異なったコマに相当すると考えれば、コマ数を最小とした運用可能な時間割を見つける問題が彩色問題と等価になります。グラフ彩色のアルゴリズムはコンピュータ科学では大変興味深いもので、多くの現実世界の問題に利用されます。ここでの貧乏な地図職人の話はフィクションなので、地図の塗り分けに使われることはまずないとは思いますが！



グラフを基づく本当に多くの問題があります。学習９の最小全域木や学習１４の支配集合のように、そのいくつかはこの本でも取り上げています。グラフはデータを表現する一般的な方法で、あらゆる種類の状況を表現するのに使うことができます。例えば、街の間を行き来する経路、分子の中の原子同士の結びつき、コンピュータネットワークを通るメッセージを経路、電子部品同士をつなぐプリント基板のパターン、そして大きなプロジェクトを遂行するのに必要な仕事の関係などです。このために、グラフ表現を含む問題は、コンピュータ科学者を長い間、魅了し続けるのです。

これらの問題の多くは大変難しい - 概念的には難しくないのですが、解くのに長い時間がかかるため難しいのです。例えば、適度な大きさのグラフ彩色問題の最も効率的な解を求める（例：３０人の教師と８００人の生徒が居る学校で一番よい時間割を見つける）には、一番良い既知のアルゴリズムを利用したコンピュータでも、何年、何百年とかかるでしょう。その問題は、解が見つかる前に意味がないものになってしまします。(その問題

を解き終わる前に、コンピュータが壊れたり、寿命がきたりしないと仮定してのことですが！）そのような問題は演習としてのみ解かれます。なぜなら、最適ではなくても、とてもよい解であれば十分だからです。もし、見つけた解が一番よいものであることが保証できるようにと主張するならば、その問題は完全に手に負えないものになるでしょう。

彩色問題の解くために必要とされるコンピュータの計算時間は、グラフのサイズに応じて指数関数的に増えます。地図彩色問題を考えてみて下さい。その問題は、地図の可能な塗り方を全て試すことで解くことができます。我々は、必要な色が多くても４色であることを知っていますから、それぞれの国に４色を割り当てるすべて組み合わせを評価する必要があります。国の数が n であるならば、4^n の組み合わせがあります。この数字は急激に増えます。国が追加されるたびに４倍の組み合わせになり、問題を解くために４倍の時間が必要となります。たとえば、たとえ１時間で５０カ国の問題を解くことができるコンピュータが開発されたとしても、１ヶ国加わると４時間が必要となり、たった１０ヶ国加えただけでそのコンピュータが解をみつけるまで１年以上が必要になります。この種の問題は、どんどん速いコンピュータを開発し続けないかぎり、解決できないでしょう。

グラフ彩色問題は、問題を解く時間が指数関数的に増えるよい例です。この学習で使った小さな地図のようにとても単純な問題例では、最適な解を見つけるのはとても簡単です。ところが１０ヶ国を超えたあたりから、その問題は手で解くには非常に困難なものになります。そして、１００以上の国では、すべての可能な配色を試して最良の解を選ぶためにはコンピュータを使っても何年もかかるでしょう。

多くの実世界の問題はこれに似ていますが、何とかして解かなければいけません。応用コンピュータ科学者は、完全ではないけれども、よい解が得られる方法を利用します。これらヒューリスティックな技術はしばしば最適にとても近く、速く計算でき、すべての実用上の目的に対してほぼ十分な答えをもたらします。

学校は時間割が完璧であるかにはこだわらず、もう１教室使うということを受け入れてくれるでしょうし、たぶん貧乏な地図職人も厳密には必要ではない１色を余分に使うぐらいの余裕はあります。

誰も従来型のコンピュータでこの種の問題を解く効率的な方法がないことを証明していませんし、逆に、誰もそれがあるとも証明していません。それ故、コンピュータ科学者は、効果的な方法がいつか発見されるのではないかという疑いを持っています。我々は、次の２つの学習でこの種の問題についてさらに学んでいきます。

参考文献

Harel は “Algorithmics” の中で歴史を含めて４色定理を論じています。地図彩色問題に関するより多くの側面については Casey と Fellows が “This is MEGA-Mathematics![*1]” で論じています。グラフ彩色問題に関するより多くの情報は Beineke と Wilson の本 “Selected Topics in Graph Theory” や、Garey と Johnson による古典的な本 “Computers and Intractability” の中で見ることができます。

[*1] http://wwwc3.lanl.gov/mega-math/welcome.html