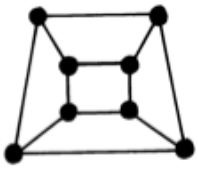
図では、あるアイスクリームワゴンの配置が最小なものかどうかを証明することは、極めて難しいのです。



実際のコンピュータでは

アイスクリーム問題に関する興味深い事のひとつは、ブルートフォースアルゴリズムよりも明らかに速い最小の配置を探すアルゴリズムが存在するかどうかを「誰も知らない」ということです。ブルートフォース法にかかる時間は、交差点の数と共に指数関数的に増えていくので、「指数時間」アルゴリズムと呼ばれています。「多項式時間」アルゴリズムは、交差点の数の 2 乗、3 乗、17 乗などの何乗かで、その実行時間が増えていくというものです。多項式時間アルゴリズムは、十分に大きな地図に対しては（たとえ 17 乗アルゴリズムであっても）高速です。なぜなら、指数増加関数は、その引数が十分大きくなったら、そこから先は、多項式増加関数を上回るからです。（例えば、計算してみればわかりますが、n が 117 より大きくなったら、n^{17} は 2^n よりも常に小さくなります。）最小の配置を見つける多項式時間アルゴリズムはあるのでしょうか？ みんなそれを見つけようと一所懸命取り組んできましたが、誰にもわからないのです。そして、ある配置が最小かどうかを調べるという、簡単そうな計算についても同様です。なぜなら、それより少ないワゴンの数ですべての配置の可能性を試すというブルートフォースアルゴリズムは、交差点の数に対する指数関数になりますし、それを解く多項式時間アルゴリズムは発見されておらず、無いことも証明されていないからです。

地図彩色問題（学習 13）を覚えていますよね。正式には「最小支配集合」問題と呼ばれるアイスクリームワゴンの問題は、多項式時間アルゴリズムが存在するかどうかを知られていない何千もの問題の中の一つです。このような問題には論理からジグソーパズルのような配置問題、地図彩色、地図上の最適経路探索、処理のスケジューリングに至るまでさまざまなものがあります。驚くべきことに、これらの問題の 1 つに対して多項式時間アルゴリズムが発見されたとしたら、それを他のすべてに対する多項式時間アルゴリズムに変換できるという意味で、等価であることが示されています。それらは、生死を共にしていると言ってもいいのです。

これらの問題は、NP 完全と呼ばれます。NP は、「非決定性多項式」を意味します。この用語は、同時に任意の数の解を計算できるコンピュータを持っていたとしたら、その問題が現実的な時間で解決できる、ということを意味しています。このことは、まったく非現実的な仮定と考えるかも知れませんが、実際、その通りなのです。任意に大きくなければならないのですから、この種類のコンピュータを作ることは不可能です。しかしながら、そのような機械の概念は原理的に重要です。なぜならそれは「NP 完全問題は非決定性コンピュータなしに、現実的な時間では解決できない」ということを示しているからです。

さらに、この種の問題は「完全」と呼ばれます。なぜならば、例えば地図彩色問題がアイスクリームワゴンの配置問題とまったく異なっているように、それらの問題は全く違うように思えますが、それらのうちの 1 つの効率的な解法が見つかれば、その方法はあらゆる問題を解決することに適用できるからです。つまりそれが「生死を共にする」ということの意味なのです。

何千もの NP 完全問題があり、多くの研究者が成功を見ずに何十年もの間、効率的な解を探してそれらに挑み続けて来ました。もし、それらの 1 つでも発見されていたら、すべてに対する効果的な解決策を得られていたでしょう。このため、効率のよい解法は存在しないのではないかと強く考えられています。しかし、この問題が必ず指数時間を要することの証明は、今日の理論計算機科学において、おそらくは数学全体においてでも、もっとも有名な未解決問題なのです。

参考文献

Harel の “Algorithmics” では、いくつかの NP 完全問題を紹介し、多項式時間アルゴリズムが存在するかどうかの問題を議論しています。Dewdney の「チューリングオムニバス」でもまた、NP 完全性を議論してます。この問題での標準的なコンピュータ科学のテキストは、Garey と Johnson の “Computers and Intractability” で、NP 完全性を証明するためのテクニックと共に、数百の NP 完全問題を紹介しています。しかしながら、読むにはかなり難しく、実際にはコンピュータ科学の専門家のみに適した本です。